Πραγματική Ανάλυση 27/11/2017

Ακολουθίες Συναρτήσεων:

Ορισμός: Έστω X να είναι ένα σύνολο και έστω $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις για $n=1,2,\dots$
Λέμε ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f εάν $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, με $m \geq n$ να ισχύει:

$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

Συμβολίζουμε $f_n \xrightarrow{u} f$

Αν δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, συμβολίζουμε $f_n \not\xrightarrow{u} f$.

ισχυρή σύγκλιση!

Ορισμός: Έστω X να είναι ένα σύνολο και έστω $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις για $n=1,2,\dots$
Λέμε ότι η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f αν ισχύουν τα εξής:

(1ο) Για κάθε $x \in X$ να υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

(2ο) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$

ασθενής σύγκλιση!

Τότε συμβολίζουμε με: $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$, ενώ όταν δεν συγκλίνει: $f_n \not\xrightarrow{\kappa\sigma} f$.

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Έστω X, να είναι σύνολο και $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις για $n=1,2,\dots$
Τότε ισχύουν τα εξής:

(1ο) $f_n \xrightarrow{u} f$ ανν $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ καθώς $n \to +\infty$

(2ο) Αν $f_n \xrightarrow{u} f$, τότε $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$

(3ο) Υπάρχουν f_n, f συναρτήσεις ώστε $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ και $f_n \not\xrightarrow{u} f$

Απόδειξη: (1ο) $(\Rightarrow)$ $f_n \xrightarrow{u} f$. Θέτουμε $a_n := \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$, $n=1,2,\dots$
με $a_n \in [0,+\infty)$

Έστω $\varepsilon_0 > 0$, ορισμένο. Από τον ορισμό υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ορισμένο ώστε $\forall n \geq n_0$ με $n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0, \ \forall x \in X$

Έστω ορισμένο $n_1 \in \mathbb{N}$, με $n_1 \geq n_0$ να ισχύει $|f_{n_1}(x) - f(x)| < \varepsilon_0 \ \forall x \in X$

Άρα $\sup_{x\in X} |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \varepsilon_0$ γιατί είναι το μικρότερο άνω φράγμα

Δηλαδή $a_{n_1} \leq \varepsilon_0$ και όμοια $a_n \leq \varepsilon_0 \ \forall n \geq n_0$

Άρα $a_n \to 0$ από τον ορισμό του ορίου άρα $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ καθώς $n \to +\infty$

$\to \to \to$

($\Leftarrow$) Έστω $a_n \to 0$, από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι για τυχόν $\varepsilon_0>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n < \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

$$|f_n(x)-f(x)| \leq a_n = \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon_0, \quad \forall x \in X$$

Άρα από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης έπεται ότι $f_n \xrightarrow{u} f$.

. . . .

(2ον) Σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in X$. Έστω ένα $\varepsilon_0>0$, ορισμένο

Από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon_0$, $\forall x \in X$. (1)

Από την (1) : ισχύει και για το x_0, δηλαδή : $|f_n(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon_0$ $\forall n \geq n_0$

Άρα από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι :

$$f_n(x_0) \to f(x_0) \text{ καθώς } n \to +\infty$$

Άρα $\forall x \in X$ έπεται ότι $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$. Άρα $f_n \xrightarrow{KC} f$.

(3ον) <u>Αντιπαράδειγμα:</u> $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{xn}{x+n}, \quad x \in [0,+\infty), \ n = 1,2,\ldots$$

Έστω $x_0 \in X$, $f_n(x) = \dfrac{xn}{x+n} = \dfrac{n x}{n(\frac{x}{n}+1)} = \dfrac{x}{\frac{x}{n}+1}$ $\quad \forall x \in [a,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Από τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι

$$\frac{x_0}{\frac{x_0}{n}+1} \to x_0, \text{ καθώς } n \to +\infty. \text{ Άρα } f_n(x_0) \to f(x_0)$$

Άρα $\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}$. δηλαδή $f_n \xrightarrow{KC} f$.

<u>Για $x>0$</u>

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{nx}{n+x} - x\right| = \left|x\left(\frac{n}{n+x}-1\right)\right| = \left|\left(x \cdot \frac{n-(x+n)}{x+n}\right)\right| = \left|x \frac{-x}{x+n}\right| =$$

$$= \left|x \cdot \frac{-x}{x\left(1+\frac{n}{x}\right)}\right| = \left|x \frac{1}{1+\frac{n}{x}}\right| = \frac{x}{1+\frac{n}{x}} \quad \text{για } x>0.$$

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x}{1+\frac{n_0}{x}}$. Όταν $x > n_0$ τότε $\dfrac{n_0}{x} < 1 \Rightarrow \dfrac{n_0}{x} + 1 < 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{n_0}{x}+1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{\frac{n}{x}+1} > \frac{x}{2}. \quad \text{Δηλαδή ότι } (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) \text{ και } x>n$$

$|f_n(x)-f(x)| > \dfrac{x}{2}$. Για $n>2$ $|f_n(x)-f(x)| > 1$ $\forall x>n$.

Άρα $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| > 1$ $\forall n > 2$. Άρα από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης έπεται ότι $f_n \not\xrightarrow{u} f$.

Παράδειγμα.

Το ίδιο παράδειγμα με απόδειξη (3η)

Έστω $f_n, f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \dots$

$f(x) = x$, $\forall x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| x\left(\frac{n}{n+x} - 1\right)\right| = \left| x \cdot \frac{n-(x+n)}{n+x} \right| = \left| x \cdot \frac{-x}{n+x} \right| = \left| \frac{-x^2}{x+n} \right| =$$

$$= \left| \frac{-x^2}{n\left(\frac{x}{n}+1\right)} \right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{x^2}{\frac{x}{n}+1}, \quad \forall x \in [0,1] \ \forall n = 1, 2, \dots$$

$$1 + \frac{x}{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1+\frac{x}{n}} \leq x^2 \leq 1 \text{ γιατί } x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{1+\frac{x}{n}}\right) < \frac{1}{n}, \ \forall x \in [0,1], \ \forall n = 1, 2, \dots$$

όμως $0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{1+\frac{x}{n}}\right) < \frac{1}{n}$, άρα έχουμε ότι:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται $f_n \xrightarrow{u} f$.

Παρατήρηση: Έστω X να είναι σύνολο και $f_n: X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις και $f, g: X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Αν $f_n \xrightarrow{u} f$ και $f_n \xrightarrow{u} g$ τότε $f = g$.

Αφού $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{κσ} f$. Έστω ότι $x_0 \in X$. Τότε $f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0)$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} g \Rightarrow f_n \xrightarrow{κσ} g$. Άρα $g(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0)$

Από μοναδικότητα ορίου έπεται ότι $f(x_0) = g(x_0)$. Άρα $\forall x \in X$ $f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$.

Παρόμοια και για την κατά σημείο σύγκλιση. Δηλαδή αν $f_n, f, g: X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \xrightarrow{κσ} f$ και $f_n \xrightarrow{κσ} g$ τότε $f = g$ (απόδειξη ανάλογη)

Γι'αυτό λέμε απλά ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα ή κατά σημείο.

Ορισμός βασικής ακολουθίας : Έστω X να είναι ένα σύνολο και έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις. Λέμε ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ή ακολουθία ομοιόμορφα Cauchy (ομοιόμορφα) αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) : \forall \nu, m \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq n$ και $m \geq n$ να ισχύει:

$$|f_\nu(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Κριτήριο Cauchy : Έστω X να είναι σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Τότε ΤΑΕΙ:

(i) Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα.

(ii) Η f_n είναι ομοιόμορφα βασική ακολουθία.

Απόδειξη: $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ έχουμε $f_n \xrightarrow{u} f$. Έστω $\varepsilon_0 > 0$ ορισμένο. Αφού $f_n \xrightarrow{u} f$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \ \forall n \geq n_0, \forall x \in X$

Απόδειξη: $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Έχουμε $f_n \xrightarrow{u} f$. Έστω $\varepsilon_0>0$ ορισμένο. Αφού $f_n \xrightarrow{u} f$ υπάρχει

$n_0 \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ $\forall n \geq n_0, \forall x \in X$

Έστω $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq n_0, \mu \geq n_0$. Τότε $|f_\nu(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon_0}{2}, \forall x\in X$ και

$|f_\mu(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon_0}{2}, \forall x \in X$

$$|f_\nu(x)-f_\mu(x)| = |f_\nu(x)-f(x)+f(x)-f_\mu(x)| \underset{\text{ανισότητα}}{\overset{\text{τριγωνική}}{\leq}} |f_\nu(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0 \ \forall x\in X$$

Δηλαδή: έδειξα ότι $\forall \nu, m \in \mathbb{N}$ με $\nu,\mu \geq n_0$: $|f_\nu(x)-f_\mu(x)|<\varepsilon_0, \forall x\in X$.
Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon_0>0$ έπεται από τον ορισμό της ομοιόμορφα βασικής ακολουθίας ότι η f_n είναι ομοιόμορφα βασική

$\boxed{(ii)\Rightarrow(i)}$ Η f_n είναι ομοιόμορφα βασική. Έστω $x_0\in X$ ορισμένο και $\varepsilon_0>0$ ορισμένο.
Από τον ορισμό της ομοιόμορφα βασικής $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\geq n_0$ να ισχύει : $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon_0, \forall x\in X$

Για $x=x_0$ έπεται : $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon_0$ $\forall n,m\in\mathbb{N}, n,m\geq n_0$

Άρα από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας πραγματικών αριθμών $f_n(x_0)$, $n=1,2,\dots$ έπεται ότι η $f_n(x_0)$, $n=1,2,\dots$ είναι βασική ακολουθία. Άρα η $f_n(x_0)$ συγκλίνει, δηλαδή $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)\in\mathbb{R}$. Αφού x_0 τυχαίο, τότε ισχύει $\forall x\in X$.

Δηλαδή $\forall x\in X$, $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\in\mathbb{R}$.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\forall x\in X$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

...πό τον τρόπο ορισμού της f έπεται ότι η f_n συγκλίνει κατά σημείο : $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$.

Θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{u} f$.

Έστω $\varepsilon_0 > 0$ ορισμένο. Τότε για το $\varepsilon_0/2$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\forall x \in X$

Σταθεροποιώ ένα $n_1 \geq n_0$. Άρα $|f_{n_1}(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\forall x \in X$

Σταθεροποιώ ένα $x_0 \in X$. Τότε $|f_{n_1}(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\forall m \geq n_0$ ①

Ορίζω την ακολουθία $b_m(x_0) = |f_{n_1}(x_0) - f_m(x_0)|$, $m = 1, 2, \ldots$ ②

Από ① $\Rightarrow$ $b_m(x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ $\forall m \geq n_0$

Είδαμε ότι $f_n(x_0) \to f(x_0)$, άρα $|f_{n_1}(x_0) - f_m(x_0)| \to |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)|$

γιατί $f_m(x_0) \to f(x_0) \Rightarrow -f_m(x_0) \to -f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{n_1}(x_0) - f_m(x_0) \to f_{n_1}(x_0) - f(x_0) \Rightarrow |f_{n_1}(x_0) - f_m(x_0)| \to |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)|$

Δηλαδή $b_m(x_0) \to |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)|$ ③

Από τις ② και ③ έπεται ότι: $|f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$

Αφού ισχύει για το τυχαίο x_0 θα ισχύει και για κάθε x:

Άρα $\forall x \in X$: $|f_{n_1}(x) - f(x)| < \varepsilon_0$

Αφού ισχύει για το τυχαίο n_1 θα ισχύει και για κάθε n:

Άρα $\forall n \geq n_0$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ $\forall x \in X$

Αφού ισχύει για το τυχαίο ε_0 θα ισχύει και για κάθε ε:

Δηλαδή από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης $f_n \xrightarrow{u} f$

Πρόταση: Έστω (X, ρ) να είναι ένας μετρικός χώρος και έστω $f_n: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ συνεχείς στο x_0 για $n = 1, 2, \ldots$, Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.
Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{u} f$. Τότε f συνεχής στο x_0.